Решения задач третьей зимней олимпиады

Алексей Золотов

January 31, 2012

Задача A. Сложение и вычитание в детском саду

Самая простая задача олимпиады. Требуется найти максимум и минимум среди трех чисел: $a+b$, $a-b$, $b-a$.

Задача B. Кубики в детском саду

С учетом того, что кубики могли только пропадать, достаточно сравнить изначальное количество кубиков с конечным.

Задача C. Алфавит в детском саду

Просто техническая задача. С учетом ограничений можно просто проверить для каждой подстроки длины 26, не является ли она алфавитом.

Задача D. Покраска ящика в детском гиперсаду

Задача на понимание условия. После понимания все просто. Достаточно из произведения $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$ всеми возможными способами выкинуть один из множителей и полученные n чисел сложить и умножить на 2.

Задача E. Торт в детском саду

Сначала найдем катеты треугольника, это $a = |x_3 - x_1|$ и $b = |y_2 - y_1|$. Теперь найдем число точек на гипотенузе. Заметим, что на линии, содержащей точки $(a, 0)$ и $(0, b)$ находятся точки вида $(a - t, bt/a)$. Эти точки целые тогда и только тогда, когда t — целое и bt/a — целое, т.е. $\frac{a}{(a,b)}|t$. Если $0 \leq t < a$, то таких точек ровно (a, b). Итоговая формула: $a + b + (a, b)$.

Задача F. Программирование в детском саду

У задачи есть множество решений, напишу одно из них. Для начала нам нужны буферные переменные, причем, такие, каких нет в исходном выражении. Возьмем, например, все двухбуквенные строки и выкинем из них те, что встречаются в исходном тексте. Останется достаточно. Теперь разберем выражение рекурсивно. Изначально рекурсивная функция работает над всей строкой и возвращает название переменной, в которой будет лежать результат. Работает так: находим самую левую открывающую скобку, находим соответствующую ей закрывающую скобку и рекурсивно вызываемся от внутренностей. То, что вернет функция вставим в строку вместо выражения в скобках. Так будем делать, пока в выражении есть скобки. Когда их не будет, в выражении останутся только слагаемые и знаки + и -. С ними работать легко.

Задача G. Дети в детском саду

Расскажу 2 решения.

Решение 1. Универсальное

Это решение работает даже если стороны не параллельны осям. Воспользуемся сканирующей линией. Похожая идея используется в стандартном алгоритме поиска пары пересекающихся отрезков за $O(n \log n)$. Будем вести вертикальную линию слева направо и отслеживать, какие ее части заняты многоугольником, а какие — нет.Для этого заведем структуру данных наподобие декартова дерева с неявным ключом. Очевидно, что многоугольник вырежет несколько отрезков на сканирующей линии. Будем хранить в дереве одну из точек для каждого из таких отрезков, а также информацию, по которой можно узнать геометрию отрезка в данный момент времени. Если мы встречаем точку такую, что оба луча из нее ведут влево (или вправо), то у нас наблюдается ситуация рождения(смерти) нового отрезка и в декартово дерево надо добавить еще одну точку. В противном случае, надо скорректировать информацию о каком-то отрезке и, возможно, перенести точку.

Решение 2. Простое

Я не хотел давать эту задачу на олимпиаду такого уровня, но я сумел придумать достаточно простое решение. Одним из способов проверки положения точки относительно многоугольника является выпускание луча из этой точки и подсчет количества пересечений с многоугольником. Если количество пересечений четно, то точка вне многоугольника, иначе внутри. Так и поступим. Из каждой точки пустим луч влево (по уменьшению координаты x). Затем запустим сканирующую линию слева направо и заведем структуру, которая будет помнить, сколько границ мы прошли и в каком месте. Такой структурой является дерево отрезков с интервальной модификацией. Теперь, если мы наткнулись на новую вертикальную границу, то добавим в дереве на этом же интервале 1 ко всем значениям. Если же мы наткнулись на точку — проверим четность в дереве отрезков в этой точке.